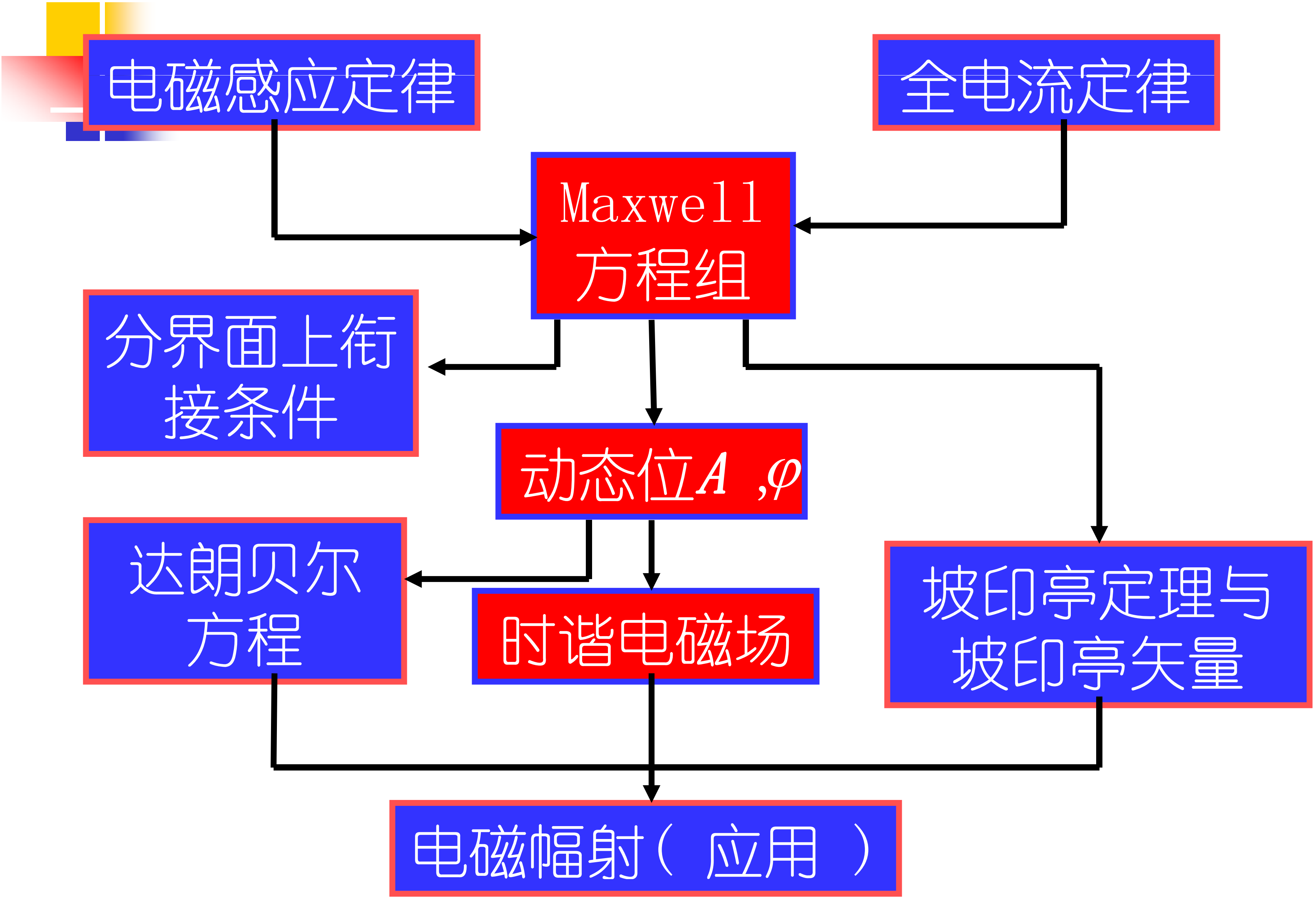
第六章 时变电磁场

本章目录:

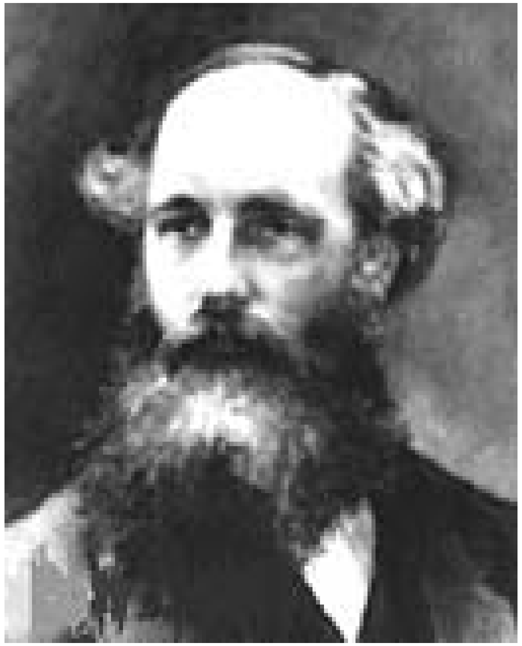
$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\
\nabla\cdot\vec{D} = \rho
\end{cases}
$$


电磁感应定律
全电流定律
Maxwell
方程组
分界面上衔
接条件
动态位A ,φ
达朗贝尔
方程
时谐电磁场
坡印亭定理与
坡印亭矢量
电磁幅射（ 应用 ）

时变场知识结构框图

§ 6.1 麦克斯韦方程

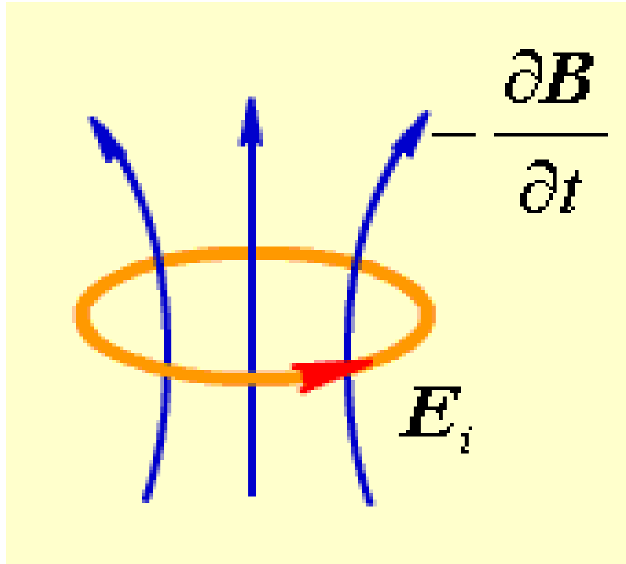
一、麦克斯韦方程与边界条件



英国科学家麦克斯韦将静态场、恒定场、时变场的电磁基本特性用统一的电磁场基本方程组高度概括。电磁场基本方程组是研究宏观电磁场现象的理论基础。他在1864年英国皇家学会宣读的论文“电磁场的动力学理论”中，提出了电磁场的普遍方程，即现在的麦克斯韦方程，其主要贡献在于总结了静电学和静磁学的物理规律以及电磁感应定律，借用矢量分析这一数学工具表达为简洁的数学方程，即电磁场的散度、旋度方程，引入了位移电流的概念，消除了方程中的矛盾，提出了这些方程普遍成立的假设，进一步预言了电磁波的存在，1868年，麦克斯韦在他的论文“关于光的电磁波理论”中，提出光也是一种电磁波，只不过频率较高而已，一切频率的电磁波都可以产生。 1888年德国物理学家赫兹用实验验证了电磁波的存在。

§ 6.1 麦克斯韦方程

静电场: $\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=0 & \text{环路定理} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f & \text{高斯定理} \end{cases}$



当由静电场变为时变场时，由电磁感应定律

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

高斯定律中电位移矢量已经包含了极化电荷的效应，所以它依然适用于时变场，唯一不同的是电位移矢量和自由电荷密度均为时变场量而已。

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$$

变化的磁场会产生电场

§ 6.1 麦克斯韦方程

$$\text{静磁场:}\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f & \text{安培定理}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0 & \text{高斯定理}\end{cases}$$

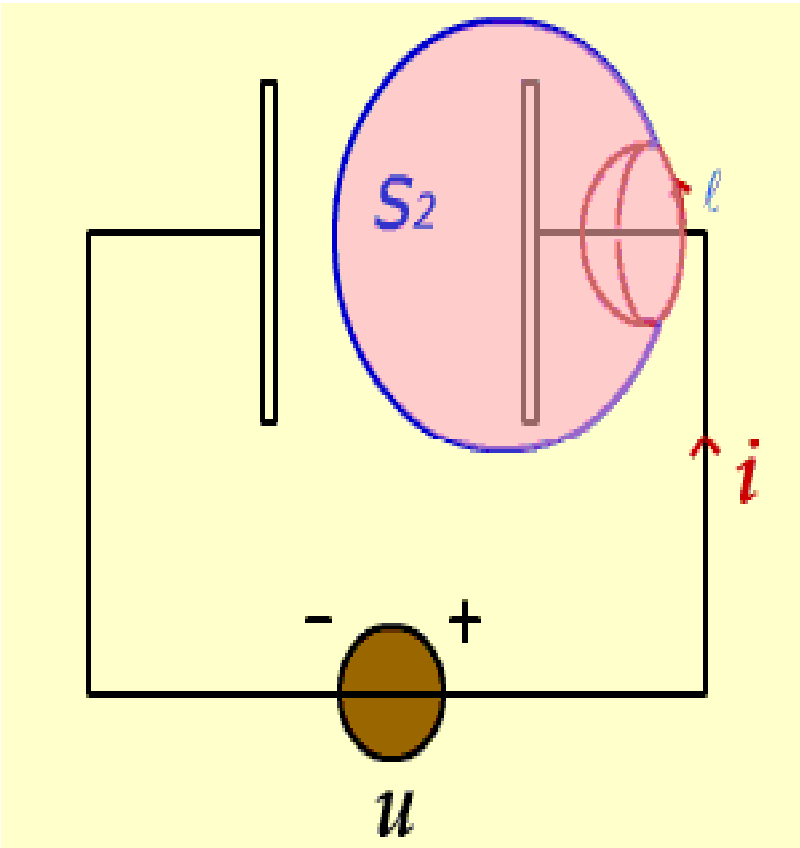
对安培定律两边取散度 $\Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot\vec{J}_f=0$

由电荷守恒定律 $\nabla\cdot\vec{J}_f=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

显然当为时变场时 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$，上面两式矛盾。

§ 6.1 麦克斯韦方程

想象一个电容器与时变电压源相连



$$\left.\begin{aligned}\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} &= \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} = i\\ \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} &= \int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0\end{aligned}\right\}\text{矛盾}$$

上述矛盾导致麦克斯韦断言，
电容器中必须有电流存在，
由于电流不能由传导产生，
他将它称为位移电流
（Displacement current）

§ 6.1 麦克斯韦方程

$$\left.\begin{aligned}&\text{高斯定理}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\&\text{电荷守恒定律}\nabla\cdot\vec{J}_f=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\nabla\cdot\vec{J}_f=-\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\Rightarrow\nabla\cdot\left(\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

定义：$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$为位移电流密度（$A/m^2$）

由于位移电流的存在使得不仅变化的磁场产生电场，变化的电场也可以产生磁场，即随时间变化的电场和磁场可以作为对方的漩涡源，这样即使在没有电荷电流的区域，电磁场也可以再产生和传播。

§ 6.1 麦克斯韦方程

例 已知平板电容器的面积为 S，相距为 d，介质的介电常数 ε，极板间电压为 $u(t)$。试求位移电流 i_D; 传导电流 i_C 与 i_D 的关系是什么?

解：忽略极板的边缘效应和感应电场

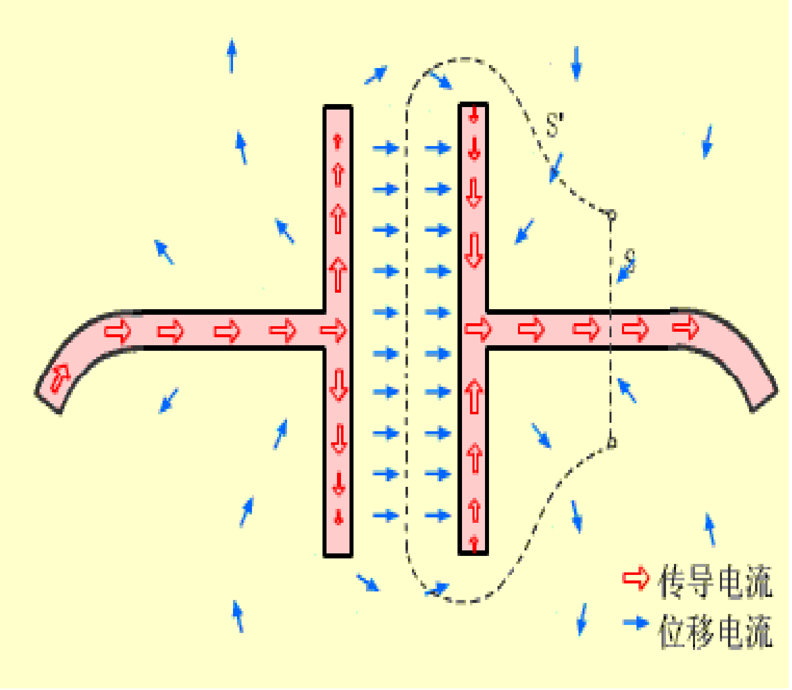
电场 $E=\dfrac{u}{d}$ ，$D=\varepsilon E=\dfrac{\varepsilon u(t)}{d}$

位移电流密度

$$J_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{d}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

位移电流

$$i_D=\int_S J_D\,dS=\frac{\varepsilon S}{d}\left(\frac{du}{dt}\right)=C\frac{du}{dt}=i_C$$



§6.1 麦克斯韦方程

由于磁力线永远是闭合的，所以静磁场的高斯定理依然成立，只是磁感应强度$\vec{B}$为时变的而已。

所以可以得到麦克斯韦方程组：

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{全电流定律} \\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{电磁感应定律} \\
\nabla\cdot\vec{B}=0 & \text{磁通连续性原理} \\
\nabla\cdot\vec{D}=\rho & \text{高斯定律}
\end{cases}
$$

§6.1 麦克斯韦方程

$$
\text{边界条件}\begin{cases}
\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_{sf} \\
\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\
\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \\
\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_{sf}
\end{cases}
$$

- 麦克斯韦第一、二方程是独立方程，后面两个方程可以从中推得。
- 静态场和恒定场是时变场的两种特殊形式。

§6.1 麦克斯韦方程

四个方程所反映的物理意义

✓全电流定律——表明传导电流和变化的电场都能产生磁场；

✓电磁感应定律——表明电荷和变化的磁场都能产生电场；

✓磁通连续性原理——表明磁场是无源场,磁力线总是闭合曲线；

✓高斯定律——表明电荷以发散的方式产生电场(变化的磁场以涡旋的形式产生电场)。

§6.1 麦克斯韦方程

通常称ρ，$\vec{J}$为一次场源，$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$和$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$为二次场源

所以电流电荷分布在有限区域时：

静电场 $\vec{E} \sim \dfrac{1}{r^2}$ 只由自由电荷产生

静磁场 $\vec{B} \sim \dfrac{1}{r^3}$ 只由自由电流产生

时谐场 $\vec{E}$，$\vec{B} \sim \dfrac{1}{r}$ 由变化的电场和磁场产生

（根源就是有二次场源）

§6.1 麦克斯韦方程

①电磁场为统一体

从方程来看是需要联立求解，从一次场源来看，电荷和电流分布一般不能独立给定，须满足电荷守恒定律（$\nabla\cdot\vec{J}_f=\frac{\partial\rho}{\partial t}$）。电荷守恒定律可以由麦克斯韦方程导出。静电静磁问题例外，因为ρ不随时间变化，所以不论其空间分布如何，不影响$\nabla\cdot\vec{J}_f=0$，也就是为什么可以对静电静磁问题分别独立的进行研究的原因。而一般的时变场，电和磁是不能分开的，除了电荷密度和电流密度相互有制约以外，还因为变化的电场产生磁场，变化的磁场产生电场。

§6.1 麦克斯韦方程

②（求解电磁场，还须知其）本构关系

线性各向同性

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\quad \vec{B}=\mu\vec{H}\quad \vec{J}=\sigma\vec{E}$$

线性各向异性

$$\vec{D}=\tilde{\varepsilon}\vec{E}\quad \vec{B}=\tilde{\mu}\vec{H}\quad \vec{J}=\tilde{\sigma}\vec{E}$$

线性双各向同性

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}+\zeta\vec{H}\quad \vec{B}=\mu\vec{H}+\eta\vec{E}\quad \vec{J}=\sigma\vec{E}$$

线性双各向异性

$$\vec{D}=\tilde{\varepsilon}\vec{E}+\tilde{\zeta}\vec{H}\quad \vec{B}=\tilde{\mu}\vec{H}+\tilde{\eta}\vec{E}\quad \vec{J}=\tilde{\sigma}\vec{E}$$

§6.1 麦克斯韦方程

③麦克斯韦方程形式上的对称性

场量的对称性　物理上：$\vec{E}$和$\vec{B}$对称，$\vec{D}$和$\vec{H}$对称

数学上：$\vec{E}$和$\vec{H}$对称，$\vec{D}$和$\vec{B}$对称

场源的不对称（一次）：

只有电荷电流，没有磁荷磁流

交界处的边界条件：

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_{sf} \qquad \hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \qquad \hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_{sf}$$

§6.1 麦克斯韦方程

二、时谐电磁场（即周期性电磁场）

$\left.\begin{matrix}\text{静态平衡}\\\text{动态平衡}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ 时间轴上场源的分布不变

周期性平衡：—周期性变化

特点：①虽然电磁场随时间变化，但经过一个周期回到原来状态

②在每个周期内观察时，场的行为相同

周期性电磁场的建立也是需要一定的时间，刚开始时并不是周期性的只有经过一段时间后才达到平衡状态。例如交流电路。后两章以及以后的微波技术、天线理论主要研究这种状态。

即相对周期而言也是不变的，可以将恒定电流场的许多规律搬过来。

§ 6.1 麦克斯韦方程

1、时谐电磁场的复数表示

①标量场

$$A = A_m(\vec r)\cos(wt+\varphi(\vec r)) \xleftrightarrow[\text{一一对应}]{A=\mathrm{Re}(\dot A e^{jwt})} \dot A(\vec r) = A_m(\vec r)e^{j\varphi(\vec r)}$$

因此复数$\dot A$完全可以代表时谐场量A

幅值$\left|\dot A(\vec r)\right| = A_m(\vec r)$代表时谐标量场的振幅

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -wA_m(\vec r)\sin(wt+\varphi(\vec r)) \leftrightarrow jw\dot A(\vec r) = jwA_m(\vec r)e^{j\varphi(\vec r)}$$

$$\mathrm{Re}(jw\dot A(\vec r)e^{jwt}) = \mathrm{Re}(wA_m(\vec r)e^{j(wt+\varphi(\vec r)+\frac{\pi}{2})}) = wA_m(\vec r)\cos(wt+\varphi(\vec r)+\frac{\pi}{2})$$

$$= -wA_m(\vec r)\sin(wt+\varphi(\vec r))$$

§ 6.1 麦克斯韦方程

$$A = A_m \cos(wt + \varphi_A) \qquad B = B_m \cos(wt + \varphi_B)$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{1}{T}\int_0^T AB dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T A_m \cos(wt + \varphi_A) B_m \cos(wt + \varphi_B) dt$$

$$= \frac{A_m B_m}{T}\int_0^T \{\frac{1}{2}\cos(2wt + \varphi_A + \varphi_B) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_A - \varphi_B)\} dt$$

$$= \frac{1}{2} A_m B_m \cos(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{A}\dot{B}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{A}^*\dot{B})$$

其中*表示共轭

§ 6.1 麦克斯韦方程

②矢量场的复数表示

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$= A_{xm}(\vec{r})\cos(wt+\varphi_x(\vec{r}))\hat{x} + A_{ym}(\vec{r})\cos(wt+\varphi_y(\vec{r}))\hat{y}$$

$$+ A_{zm}(\vec{r})\cos(wt+\varphi_z(\vec{r}))\hat{z}$$

由$A_x = A_{xm}(\vec{r})\cos(wt+\varphi_x(\vec{r})) \overset{A_x=\mathrm{Re}(\dot{A}_x e^{jwt})}{\underset{\text{一一对应}}{\longleftrightarrow}} \dot{A}_x(\vec{r}) = A_{xm}(\vec{r})e^{j\varphi_x(\vec{r})}$

$$A_y = A_{ym}(\vec{r})\cos(wt+\varphi_y(\vec{r})) \overset{A_y=\mathrm{Re}(\dot{A}_y e^{jwt})}{\underset{\text{一一对应}}{\longleftrightarrow}} \dot{A}_y(\vec{r}) = A_{ym}(\vec{r})e^{j\varphi_y(\vec{r})}$$

$$A_z = A_{zm}(\vec{r})\cos(wt+\varphi_z(\vec{r})) \overset{A_z=\mathrm{Re}(\dot{A}_z e^{jwt})}{\underset{\text{一一对应}}{\longleftrightarrow}} \dot{A}_z(\vec{r}) = A_{zm}(\vec{r})e^{j\varphi_z(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \overset{\vec{A}=\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}} e^{jwt})}{\underset{\text{一一对应}}{\longleftrightarrow}} \dot{\vec{A}} = \dot{A}_x\hat{x} + \dot{A}_y\hat{y} + \dot{A}_z\hat{z}$$

§ 6.1 麦克斯韦方程

说明：矢量场所对应的复矢量场通常情况下没有模的概念，或者说即使定义了也没有物理意义，因为一般情况下矢量场的各个分量的相角不一定相同，矢量场的振幅大小（或者说模）$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$不是一个常数。因此$\left|\dot{\vec{A}}\right| = \sqrt{\left|\dot{A}_x\right|^2 + \left|\dot{A}_y\right|^2 + \left|\dot{A}_z\right|^2}$没有任何意义，既不能表示矢量场的大小，更不能代表模。

§ 6.1 麦克斯韦方程

只有当三个分量的相位相同时，即$\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = \varphi$时

$\dot{\vec{A}} = \vec{A}_m e^{j\varphi}$，其中$\vec{A}_m$为实矢量$\vec{A}_m = \vec{A}_{xm}\hat{x} + \vec{A}_{ym}\hat{y} + \vec{A}_{zm}\hat{z}$

此时$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_{xm}^2 + A_{ym}^2 + A_{zm}^2}\cos(wt+\varphi)$

故可定义$\left|\dot{\vec{A}}\right| = \left|\vec{A}_m\right|$代表矢量场的振幅

$$\overline{\vec{A}\cdot\vec{B}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{A}}\cdot\dot{\vec{B}}^*]$$

$$\overline{\vec{A}\times\vec{B}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{A}}^*\times\dot{\vec{B}}]$$

复矢量的点乘和叉乘与实矢量的点乘叉乘形式上相同，但没有几何意义。

§ 6.1 麦克斯韦方程

2、时谐场的麦克斯韦方程组

此时我们可以把实矢量换成复矢量，把 $\frac{\partial}{\partial t} \to jw$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_f + jw\dot{\vec{D}} \\ \nabla \times \dot{\vec{E}} = -jw\dot{\vec{B}} \\ \nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho}_f \end{cases}$$

§6.1 麦克斯韦方程

说明：

①由于二散度方程不独立，可由二旋度方程得到，所以相应地，交界处仅需考虑两个切向条件即可。（旋度方程满足后，自动满足散度方程，若w=0，则为静电静磁场，相互独立）

$$\text{由}\nabla\times\dot{\vec{E}}=-jw\dot{\vec{B}}\Rightarrow 0=\nabla\cdot(\nabla\times\dot{\vec{E}})=-jw\nabla\cdot\dot{\vec{B}}\overset{w\neq 0}{\Rightarrow}\nabla\cdot\dot{\vec{B}}=0$$

$$0=\nabla\cdot(\nabla\times\dot{\vec{H}})=\nabla\cdot(\dot{\vec{J}}_f+jw\dot{\vec{D}})\Rightarrow\nabla\cdot\dot{\vec{D}}=\dot{\rho}_f,\because\nabla\cdot\dot{\vec{J}}_f=-jw\dot{\rho}_f$$

§ 6.1 麦克斯韦方程

②理想导体的边界条件

$$\text{内部由}\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{J}}_f=\sigma\dot{\vec{E}}\\ \dot{\vec{J}}_f\text{有限}\end{array}\right\}\Rightarrow\dot{\vec{E}}=0\Rightarrow\dot{\vec{D}}=\varepsilon\dot{\vec{E}}=0$$

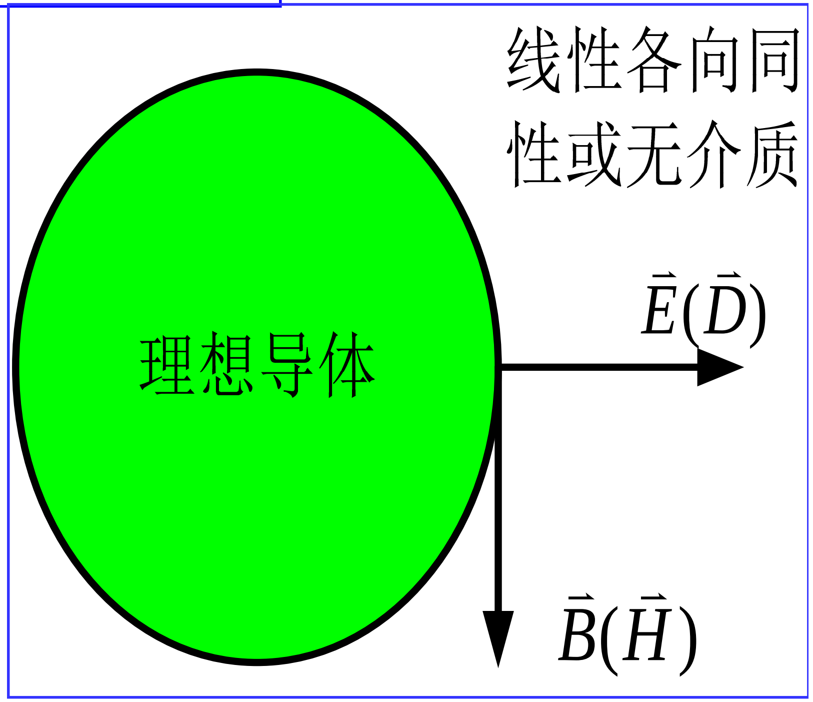
$$\Rightarrow\dot{\rho}_f=\nabla\cdot\dot{\vec{D}}=0$$

若$w\neq0$，则$0=\nabla\times\dot{\vec{E}}=-jw\dot{\vec{B}}\Rightarrow\dot{\vec{B}}=0$

$$\Rightarrow\dot{\vec{H}}=\frac{\dot{\vec{B}}}{\mu}=0$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}0=\nabla\times\dot{\vec{H}}=\dot{\vec{J}}_f+jw\dot{\vec{D}}\\ \dot{\vec{D}}=\varepsilon\dot{\vec{E}}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\dot{\vec{J}}_f=0$$

即理想导体电流只分布在于外表面



$$\text{边界条件}\left\{\begin{array}{l}\hat{n}\cdot\vec{D}_2=\rho_{sf}\\ \hat{n}\times\vec{E}_2=0\\ \hat{n}\cdot\vec{B}_2=0\\ \hat{n}\times\vec{H}_2=\vec{J}_{sf}\end{array}\right.$$

§ 6.1 麦克斯韦方程

若$w \neq 0$，则$\dot{\vec{D}}$，$\dot{\vec{E}}$，$\dot{\rho}_f$，$\dot{\vec{B}}$，$\dot{\vec{H}}$，$\dot{\vec{J}}_f$均为零

若$w=0$，则$\dot{\vec{D}}$，$\dot{\vec{E}}$，$\dot{\rho}_f$均为零，$\dot{\vec{B}}$，$\dot{\vec{H}}$，$\dot{\vec{J}}_f$不为零

说明：与恒定电流场中的理想导体的区别，那里$\vec{B}$，$\vec{H}$，$\vec{J}_f$不为零，即电学量（$\vec{D}$，$\vec{E}$，ρ_f）为零，磁学量（$\vec{B}$，$\vec{H}$，$\vec{J}_f$）不为零。自然！

在时谐场中，电和磁不能分开，变化的电场产生磁场，变化的磁场产生电场，不可能电学量（$\vec{D}$，$\vec{E}$，ρ_f）为零，磁学量（$\vec{B}$，$\vec{H}$，$\vec{J}_f$）不为零。

§ 6.1 麦克斯韦方程

③线性均匀各向同性导电介质（$\sigma\neq0$）内部$\dot{\rho}_f=0$

由
$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\dot{\vec{J}}_f&=-jw\dot{\rho}_f\\ \nabla\cdot\dot{\vec{J}}_f&=\nabla\cdot(\sigma\dot{\vec{E}})=\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\dot{\vec{D}}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\dot{\rho}_f\end{aligned}\right\}\Rightarrow(\frac{\sigma}{\varepsilon}+jw)\dot{\rho}_f=0$$

$\because\sigma\neq0\Rightarrow\dot{\rho}_f=0$此即为平衡标志

前面提到，时谐场是一种周期性平衡状态，建立这种平衡状态需要一定的时间，可以根据平衡状态$\dot{\rho}_f=0$这一点计算导电介质中建立平衡状态所需时间的数量级即驰豫时间，推导方法及结果和前面恒定电流场中的推导及结果完全相同。

即$\tau=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$

§6.1 麦克斯韦方程

④电荷分布完全由电流分布决定（$w \neq 0$)。

因为必须服从电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \dot{\vec{J}}_f = -jw\dot{\rho}_f,$$

只要$\dot{J}_f$分布确定，则$\dot{\rho}_f$已经完全确定，

不存在任何自由度。

§ 6.2 电磁场的位函数表示

一、矢量位 $\vec{A}$ 和标量位 φ

仍从电磁场的基本方程出发：$\nabla\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A}\Rightarrow\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\Rightarrow\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\Rightarrow\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$$

$\vec{A}$、φ称为动态位（potential of Kinetic State）

因为$\vec{A}$不唯一，所以导致φ也不唯一

注：当$\dfrac{\partial}{\partial t}=0$，退化为静磁场的矢量位和静电场的电位，在静电场中的电位有物理意义，但在时变场中没有，为数学量。

§ 6.2 电磁场的位函数表示

证：令$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$，其中$\psi$为任意标量函数，

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}'$$

则$\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi' \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{A}' - \vec{A}) = -\nabla(\varphi' - \varphi)$

即$\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi) = -\nabla(\varphi' - \varphi) \Rightarrow \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -(\varphi' - \varphi)$

$$\Rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

所以 $\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\dfrac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \nabla\varphi'$

§ 6.2 电磁场的位函数表示

这样一个变换$[(\vec{A}、\varphi)\rightarrow(\vec{A}'、\varphi')]$，使得所表示的电磁场量不变，这样的位函数变换即为规范变换。

在适当的变换下，矢量位和标量位所描述的电磁场保持不变的性质$\rightarrow$规范不变性

用了位函数后，求解的场分量由原来的6个（$\vec{E}$、$\vec{B}$）变成了4个（$\vec{A}$、φ）

§ 6.2 电磁场的位函数表示

二、$\vec{A}$、φ满足的方程

设介质为线性均匀无损各向同性介质，

即$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\quad \vec{B}=\mu\vec{H}\quad \sigma=0$

$$\because \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \Rightarrow \varepsilon\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)=\rho_f$$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\rho_f/\varepsilon$$

§ 6.2 电磁场的位函数表示

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}_f+\mu\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
&\text{又有}\because\nabla\times\vec{B}=\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}\\
&\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi)
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu\vec{J}_f$$

上面两式即可求出$\vec{A}$、φ，但其两式中均含有$\vec{A}$、φ，不好求解，我们可以利用位函数有自由度（可表示为相差一个函数，不唯一）加限制条件从而简化。

§ 6.2 电磁场的位函数表示

(1)洛伦兹规范（条件）

由
$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}=\vec{J}_f+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi)\\&\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\Rightarrow\varepsilon\nabla\cdot(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi)=\rho_f\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_f+\nabla(\nabla\cdot\vec{A})+\mu\varepsilon\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\\[2ex]\nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}\end{cases}$$

§ 6.2 电磁场的位函数表示

所以规定$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$(洛伦兹规范)

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_f\ \text{（矢量）}\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}\ \text{（标量）}\end{cases}$$ 称为达朗贝尔方程或波动方程

对时谐场，只要把$\dfrac{\partial}{\partial t}\to jw$，所有推导公式均成立

特别有$\nabla\cdot\dot{A}+jw\mu\varepsilon\dot{\varphi}=0$，若$w\neq0\Rightarrow\dot{\varphi}=-\dfrac{1}{jw\mu\varepsilon}\nabla\cdot\dot{A}$，即只要求出$\dot{A}$即可

$\dot{\varphi}$可由洛伦兹规范求得

$w=0$的时谐场为静电静磁场，$\bar{A}$、φ必须各自单独求解

§ 6.2 电磁场的位函数表示

说明：对确定的电磁场选择一组$\vec{A}$、φ，使其满足洛伦兹条件是完全可能的。若不满足，则通过适当的规范变换使之满足。

证：若$\vec{A}$、φ不满足洛伦兹条件，则

$$\nabla\cdot\vec{A}' + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = \nabla\cdot(\vec{A}+\nabla\psi) + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t})$$

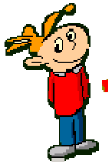
$$= \nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2\psi + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

为使$\vec{A}'$、φ'满足洛伦兹条件，则ψ应满足：

$$\nabla^2\psi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -(\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t})$$

因此只要选择ψ使它满足上式，则可使$\vec{A}'$、φ'满足洛伦兹规范，同时可以看出：即使$\vec{A}$、φ满足洛伦兹规范，也可以通过上式得到新的一组位函数使其满足洛伦兹规范，因此即使在洛伦兹规范下位函数仍是不唯一的。

§6.2 电磁场的位函数表示



讨论与引伸

1） 洛仑兹条件的重要意义

- 简化了动态位与场源之间的关系，使得 $\vec{A}$ 单独由 $\vec{J}_f$ 决定，φ 单独由 ρ_f 决定，给解题带来了方便；
- <u>洛仑兹条件是电流连续性原理的体现。</u>

2） 若场不随时间变化，波动方程蜕变为泊松方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_f \qquad \nabla^2 \varphi = -\rho_f / \varepsilon$$

§ 6.2 电磁场的位函数表示

(2)库仑规范$\nabla\cdot\vec{A}=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}\\[2ex]\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu\varepsilon\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\mu\vec{J}_f\end{cases}$$

在库仑规范下，φ的公式最简单，$\vec{A}$、φ确定，即不同的$\vec{A}$、φ之间最多相差一个任意常矢量或常数。

若不随时间变化，则退化为静电静磁场方程。

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

求解区域：无限大空间　　　　介质：真空μ_0、ε_0

源区分布：电荷电流分布在有限空间

令$C=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ → 真空中的光速，代表电磁波在无限大空间没有介质时的传播速度。

则达朗贝尔方程可以写为：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}_f & \text{（矢量）}\\[2ex] \nabla^2\varphi-\dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho_f}{\varepsilon} & \text{（标量）}\end{cases}$$

§6.3 达朗贝尔方程的解

一、标量格林函数

定义:$\begin{cases} \nabla^2 G - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}^{\,'})\delta(t-t^{'}) \\ \text{无限远处无场源} \end{cases}$

注意：G与静电场中的格林函数稍有差别，即$q(t)$不能取为1，否则带电量不随时间变化，最终结果也不随时间变化。

意义:G/ε_0代表了t'时刻位于$\vec{r}\,'$处单位点电荷单位时间内产生的标量位即$G = G(\vec{r},\vec{r}^{\,'},t,t^{'})$

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

G/ε_0 和电位φ对应，$\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$与$\rho_f$对应，但不完全相同。

$$\because \iint \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')dVdt = q, \quad \int \rho_f dV = q$$

$\therefore$ 求出的G/ε_0为单位时间内的标量位，若求φ则需在时间上积分。

由于整个问题以$\vec{r}'$为中心球对称，因此只须求$\vec{r}'=0$时的格林函数即可，$\vec{r}'$为任意位置时，作个平行变换即可。同样只须求$t'=0$时单位点电荷的场，t'不为零时，在时间轴上作平移即可

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

1、求$G_0 = G\big|_{\vec{r}'=0,t'=0} = G(\vec{r},0,t,0)$

由定义知：$\begin{cases} \nabla^2 G_0 - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r})\delta(t) \\ \text{无限远处无场源} \end{cases}$

由于球对称性，所以可设$G_0(\vec{r},0,t,0) = G_0(r,0,t,0)$

另外由于$r=0$处为奇点，所以令$G_0 = \dfrac{\psi(r,t)}{r}$

（原因是当电荷分布不随时间变化，退化成静电场格林函数，应有$G \sim \dfrac{1}{r}$，这样令$G_0 = \dfrac{\psi(r,t)}{r}$后，$\psi(r,t)$没有奇点，否则无法和静电场吻合)

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

由于$\psi(r,t)$没有奇点，所以可将算子用微分算子表示：

$$\nabla^2 G_0 = \nabla\cdot(\nabla\frac{\psi}{r}) = \nabla\cdot(-\frac{\vec{r}}{r^3}\psi + \frac{1}{r}\nabla\psi)$$

$$= -(\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3})\psi - \frac{\vec{r}}{r^3}\nabla\psi - \frac{\vec{r}}{r^3}\nabla\psi + \frac{1}{r}\nabla^2\psi$$

$$\therefore \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\nabla r = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) = \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$\therefore \nabla^2 G_0 = -4\pi\delta(\vec{r})\psi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$= -4\pi\delta(\vec{r})\psi + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \nabla\cdot(\nabla\frac{\psi}{r})$$

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

$(A) r > 0, t \neq 0$时 $\Rightarrow \delta(t) = 0$

将上式带入$\nabla^2 G_0 - \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 G_0}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r})\delta(t)$

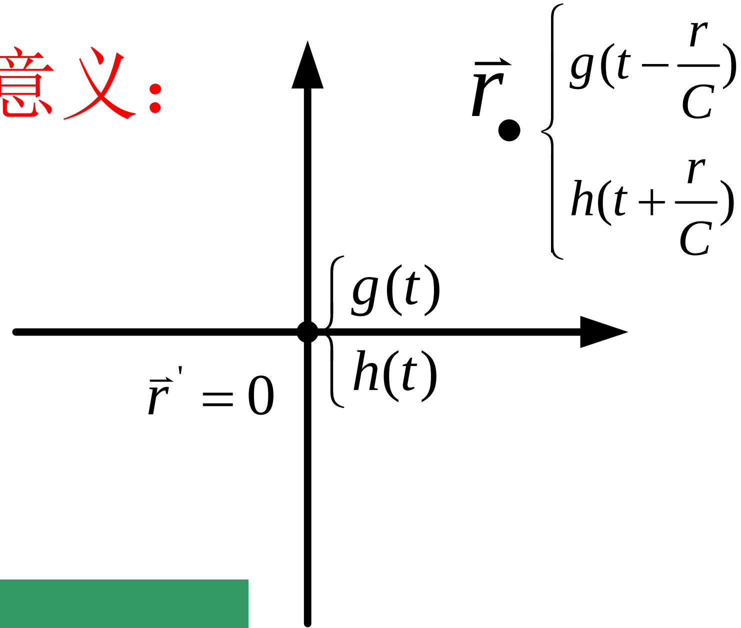
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

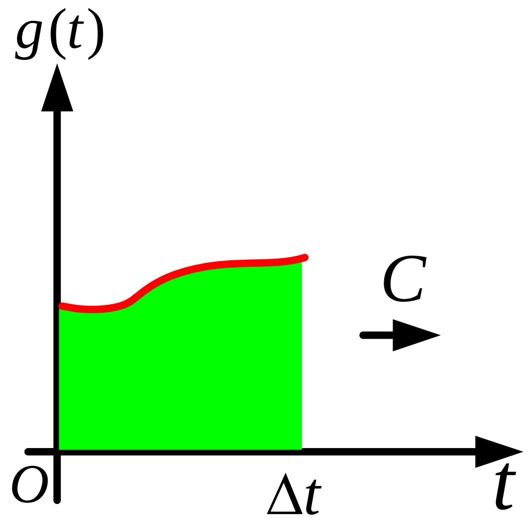
其通解为$\psi(r,t) = g(t - \dfrac{r}{C}) + h(t + \dfrac{r}{C})$

其中g, h为任意函数

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

通解的物理意义：





$g(t-\frac{r}{C})$的物理意义

当时间从$t \rightarrow t+\Delta t$

信号从$r \rightarrow r+C\Delta t$

有 $g(t+\Delta t-\frac{r+C\Delta t}{C})=g(t-\frac{r}{C})$

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

g在Δt时间内经过Δr距离后不变，说明它是以有限速度$\bar{C}$向r方向传播称之为入射波。

或者说$g(t-\frac{r}{C})$的物理意义是：t时刻观察点的场取决于场源所在位置前一时刻的状态，它代表的是推迟位，而$\frac{r}{C}$正好为电磁波从$r=0$的原点传播到观察点所需的时间，也就是观察点感受到场源（点电荷）产生的场的作用推迟的时间，物理上合理，保留！

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

$h(t+\frac{r}{C})$的物理意义

当时间从$t \to t+\Delta t$

信号从$r \to r-C\Delta t$

有 $$h(t+\Delta t+\frac{r-C\Delta t}{C})=h(t+\frac{r}{C})$$

h在Δt时间内经过Δr距离后不变，说明它是以有限速度$\bar{C}$向$(-\bar{r})$方向传播称之为反射波，无限大空间无反射，舍去。

或者说$h(t+\frac{r}{C})$的物理意义是：t时刻观察点的场取决于场源所在位置t时刻以后的状态，它代表的是超前位，因此因果关系颠倒，舍去！

$h(t+\frac{r}{C})$实际上表示由无限远处向内传播的波，这里舍去，在其它问题中可能保留。

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

$$所以 \Rightarrow \psi(r,t) = g(t-\frac{r}{C})$$

(B)包含$r=0, t=0$时

上述解仅对$r>0, t\neq 0$成立，代回原方程使得在$r=0, t=0$时也成立

$$-4\pi\delta(\vec{r})g(t-\frac{r}{C}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(t-\frac{r}{C})}{\partial r^2} - \frac{1}{C^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g(t-\frac{r}{C})}{\partial r^2} = -\delta(\vec{r})\delta(t)$$

对上式两边包含$r=0$点的球体积积分，且球半径趋于0

$$\Rightarrow -4\pi g(t) + 0 = -\delta(t)$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{4\pi}\delta(t) \Rightarrow G_0 = \frac{1}{r}g(t-\frac{r}{C}) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t-\frac{r}{C})$$

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

2、$\vec{r}' \neq 0, t' \neq 0$时

$$G(\vec{r},\vec{r}',t,t') = \frac{1}{4\pi R}\delta(t - t' - \frac{R}{C})$$

$$其中R = \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|$$

G/ε_0 代表了t'时刻位于$\vec{r}'$处单位点电荷单位时间内产生的标量位。

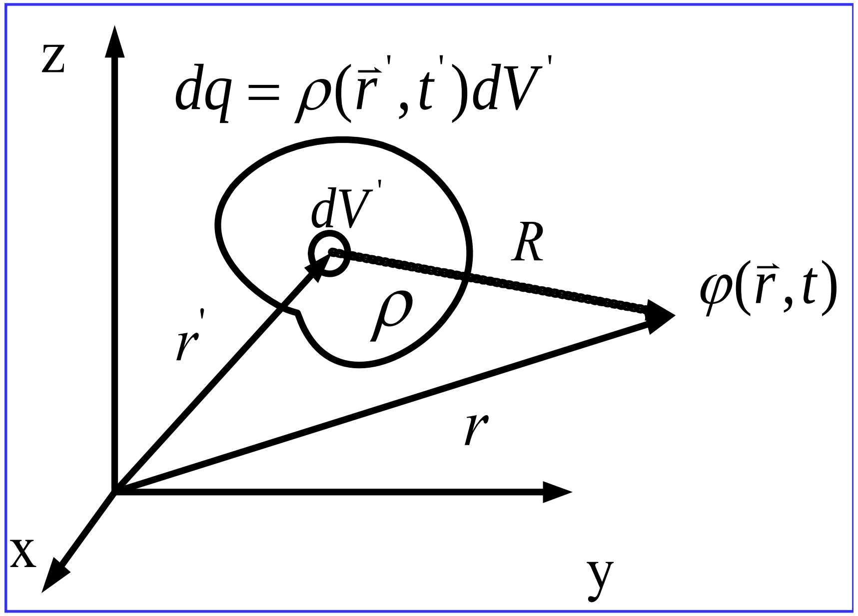
§ 6.3 达朗贝尔方程的解

二、达朗贝尔方程的解

$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho(\vec r',t')dV'\delta(t-t'-\frac{R}{C})$$

$$\varphi=\int dt'\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho(\vec r',t')dV'\delta(t-t'-\frac{R}{C})$$

$$=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho(\vec r',t-\frac{R}{C})dV'$$



§ 6.3 达朗贝尔方程的解

对于$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$，可对每个分量作如上计算，然后叠加。

得：
$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}^{'},t-\frac{R}{C})}{R}dV^{'}$$

(或者作替换$\rho\to\vec{J}$，$\varepsilon_0\to\frac{1}{\mu_0}$即可)

场与时间有关，观察点场在某一时刻的状态与前面源区某一时刻的状态有关（滞后效应）。其中$t^{'}=t-\frac{R}{C}$不是常数，对于不同的源，对应不同的前一时刻。

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

讨论与引伸

* 达朗贝尔方程解的形式表明：t时刻的响应取决于

$(t-\dfrac{R}{C})$时刻激励源 的情况，故又称$\vec{A}$，φ为滞后位

（Retarded Potential）

*电磁波是以有限的速度传播的，这个速度称为

波速$C=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,(m/s)$

*电磁波在真空中的波速与光速相同，光也是一种

电磁波。

§ 6.3 达朗贝尔方程的解

* 为何将达朗贝尔方程中的$C=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,(m/s)$定义为速度？

$\because$ 它具有速度的量纲，且通解中的$g(t-\dfrac{r}{C})$经过Δt后保持

不变，必然有 自变量不变，即$t-\dfrac{r}{C}=const$

$$\Rightarrow r=C(t-const)\Rightarrow \frac{dr}{dt}=C$$

表明：$g(t-\dfrac{r}{C})$是一个以速度C沿着r方向前进的波。

§ 6.4 波印亭定理

- 电磁场作为一种物质形式是具有能量的。
- 电磁能量符合自然界物质运动过程中能量守恒和转化定律——坡印亭定理；
- 坡印亭矢量是描述电磁场能量流动的物理量。

介质：线性、各向同性

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu(\vec{r})\vec{H}$$

§ 6.4 波印亨定理

一、波印亨定理

由麦克斯韦方程出发：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdots①\qquad\Rightarrow\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}=\vec{E}\cdot\vec{J}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdots②\qquad\Rightarrow\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$\vec{E}\cdot①-\vec{H}\cdot②$

$$\Rightarrow\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=\vec{J}\cdot\vec{E}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

§ 6.4 波印亭定理

$$\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{H}-\vec{H}\cdot\nabla\times\vec{E}=\nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{E})$$

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{D})$$

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}\cdot\vec{H})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{H})$$

令$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\Rightarrow-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{J}\cdot\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H})$

——波印亭定理的微分形式

$$\therefore -\oint_S\vec{S}\cdot d\vec{S}=\int_V\vec{J}\cdot\vec{E}dV+\frac{\partial}{\partial t}\int_V(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H})dV\cdots\cdots(1)$$

——波印亭定理的积分形式

§6.4 波印亭定理

令：

$P=\vec{J}\cdot\vec{E}$：为功率密度，根据焦耳定律，代表电场单位时间内对单位体积内的运动电荷（或电流）所作的功（磁场不作功）。（体积分则表示电场对体积V内运动电荷单位时间所作的功）

$w_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$：（当场为静电场时，为静电场能量密度，即单位体积内 存储在静电场中的能量）这里代表瞬时的能量密度。即代表时变电场的能量密度，即电磁场随时间变化时，单位体积内存储的电场能量仍为w_e。

§ 6.4 波印亭定理

$w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$：（当场为静磁场时，为静磁场能量密度，

即单位体积内存储在静磁场中的能量）

这里代表瞬时的能量密度。即代表时变磁场的能量密度，即电磁场随时间变化时，单位体积内存储的磁场能量仍为w_m。

这样$w = w_e + w_m$为电磁场总的能量密度，代表单位体积内存储的电磁场的总能量。（体积分表示V内存储的电磁场的总能量）

§ 6.4 波印亭定理

现考虑：V内没有外力，即没有非电磁场力（没有电源等），根据能量守恒，能量既不能产生，也不能消失，只能转换：（1）式右边表明电磁场既对运动电荷作了功，又增加了自己的能量这部分能量从何而来？只能由V外的电磁场传递到体积V内，因此（1）式左边应代表V外传递到V内的能量。

称：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$为能流密度矢量或波印亭矢量（$W/m^2$）

$$\underbrace{-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}}_{\text{反映交换能量}}=\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}dV+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V wdV}_{\text{反映存储能量}} \qquad w=w_e+w_m$$

§6.4 波印亭定理

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$　方向：代表电磁场能量的传输方向

大小：代表单位时间内流过垂至于传输方向单位面积的能量，（或者说流过垂至于传输方向单位面积的功率）

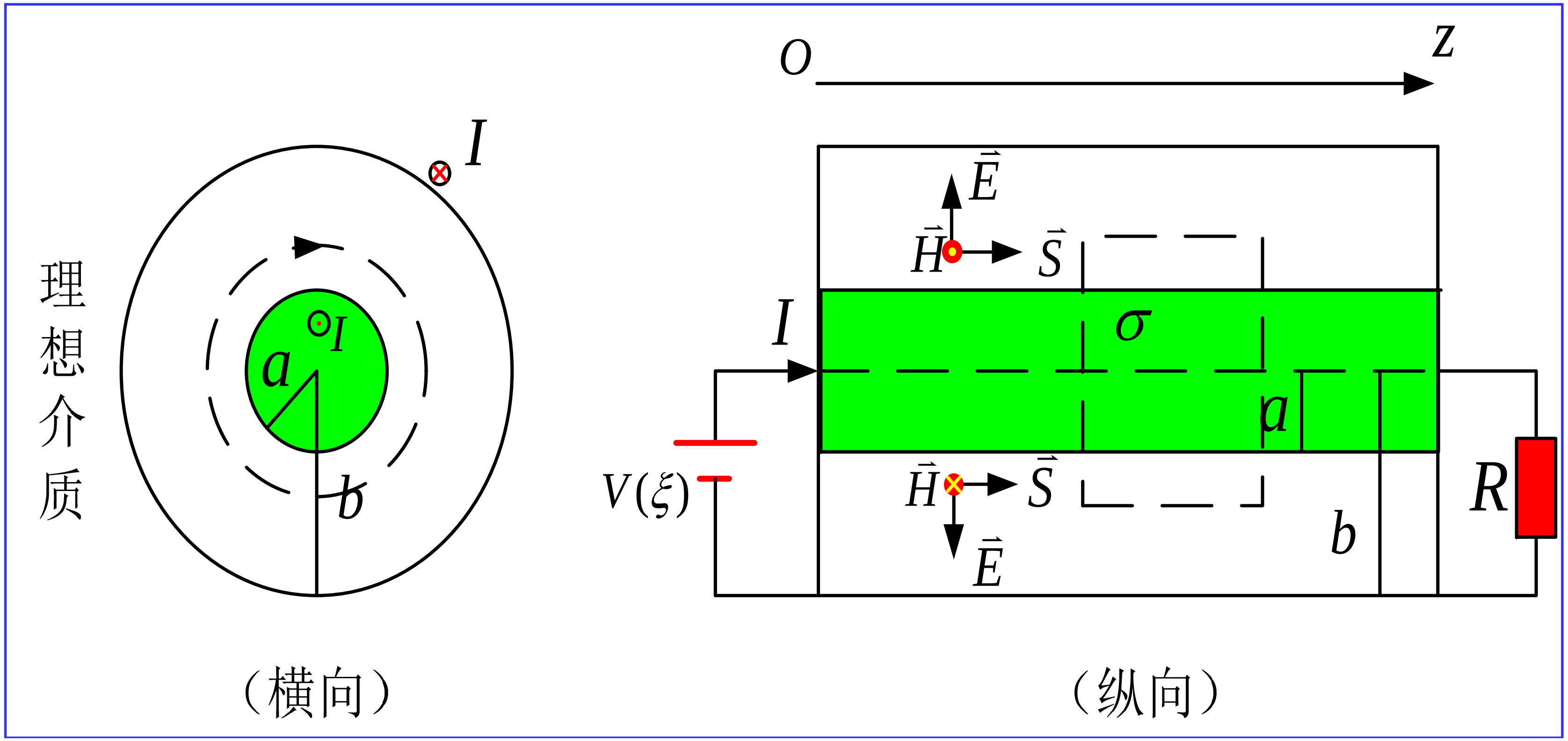
（1）式称为波印亭定理

（1）式中 $\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$表示流出能量，加负号表示流入

§6.4 波印亭定理

例：同轴线中内外导体流有相反方向的恒定电流I，内外导体的电位差为$V(\xi)$，内导体半径为a，外导体半径为b，求同轴线的传输功率。

（1）$\sigma=\infty$　　（2）$\sigma\neq\infty$



§ 6.4 波印亭定理

解：（1）$\sigma=\infty$

由安培环路定理 $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I \Rightarrow \vec{H}=\begin{cases}\dfrac{\pi r^2 I}{\pi a^2}\dfrac{1}{2\pi r}\hat{\theta}=\dfrac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\theta} & r<a \\ \dfrac{I}{2\pi r}\hat{\theta} & a<r<b\end{cases}$

由高斯定理

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\vec{E}=E_r\vec{r} \\ \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_f\end{array}\right\}\Rightarrow E_r=\dfrac{Q_f}{2\pi\varepsilon r} \\ \int_a^b E_r dr=V=\dfrac{Q_f}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{b}{a}\Rightarrow Q_f=2\pi\varepsilon V\Big/\ln\dfrac{b}{a}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{E}=\begin{cases}0 & r<a \\ \dfrac{V}{r\ln\dfrac{b}{a}}\hat{r} & a<r<b\end{cases}$$

§ 6.4 波印亭定理

$$\text{所以}\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\begin{cases}0 & r<a\\ \dfrac{IV}{2\pi r^2\ln\dfrac{b}{a}}\hat{z} & a<r<b\end{cases}$$

$$\text{传输功率}\vec{P}=\int_S\vec{S}\cdot d\vec{S}=\int_a^b\frac{IV}{2\pi r^2\ln\dfrac{b}{a}}2\pi r dr=IV$$

讨论：沿同轴线传输的功率等于电压和电流的乘积，与电路理论的结果一致，电源提供的能量全部被负载电阻吸收。当导体为理想导体时，能流密度只存在于内外导体之间，功率的传输全部是在内外导体之间进行的，导体的作用只是起了引导电磁场能量定向流动的作用，而不是象电路理论所得到的印象那样（能量是在导体中传输的）。

电子定向漂移速度约10^{-4}米/秒，金属中电子平均热运动速度约10^{5}米/秒

§ 6.4 波印亭定理

（2）$\sigma \neq \infty$

同上，$\vec{H}$表达式不变，只是I变小

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{I}{\pi a^2 \sigma}\hat{z} & r < a \\ \dfrac{V - R_l z I}{r \ln \dfrac{b}{a}}\hat{r} + \underbrace{\dfrac{I \ln \dfrac{r}{b}}{\pi a^2 \sigma \ln \dfrac{a}{b}}}_{(*)}\hat{z} & a < r < b \end{cases}$$

其中$R_l = \dfrac{1}{\pi a^2 \sigma}$为内导体单位长度电阻

(*)满足的方程和边界条件为
$$\begin{cases} \nabla^2 E_z = 0 \\ E_z\big|_{r=a} = \dfrac{I}{\pi a^2 \sigma}, E_z\big|_{r=b} = 0 \end{cases}$$

§ 6.4 波印亭定理

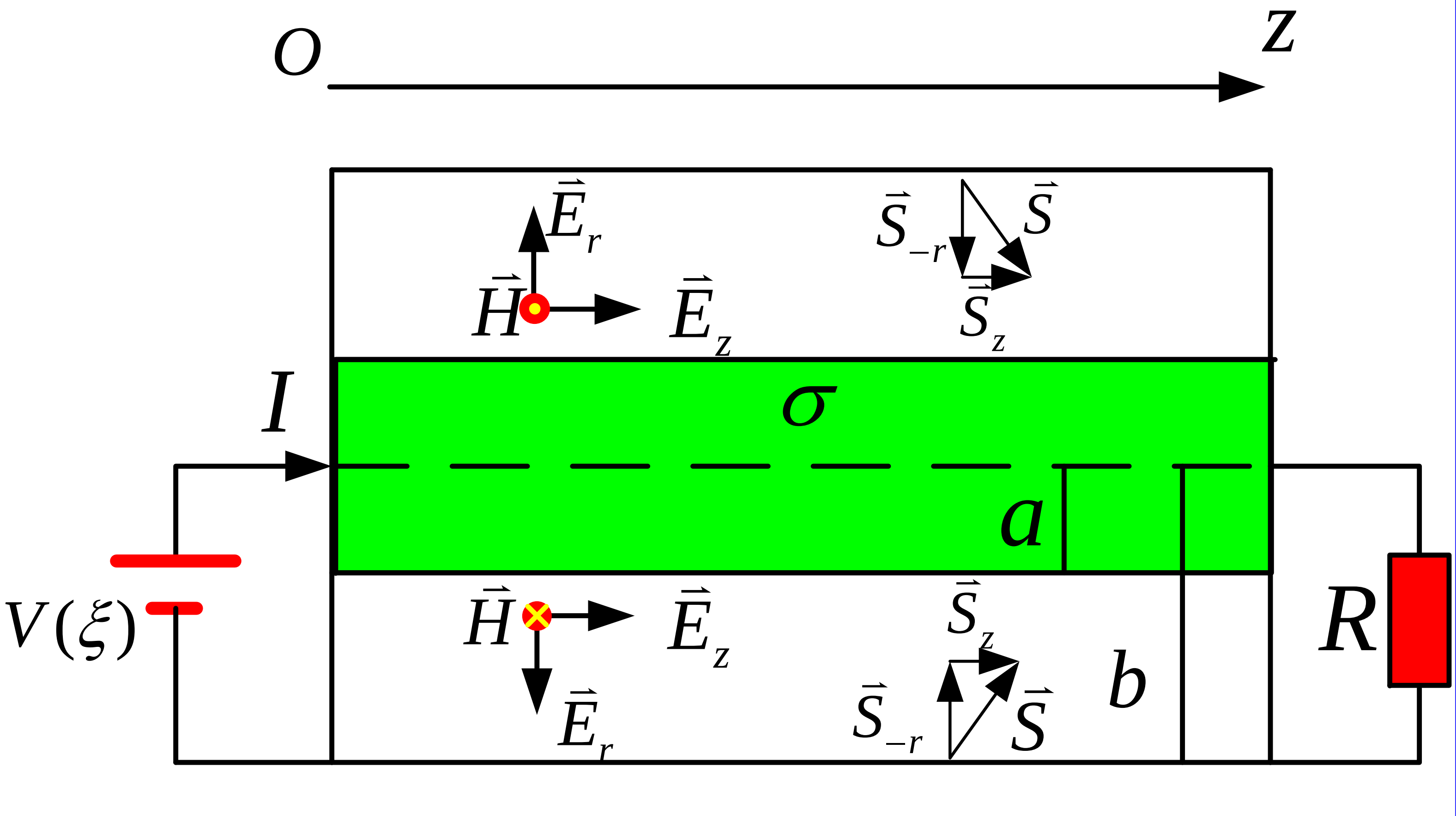
所以$\vec{S}$有两个分量$\hat{z}$和$\hat{r}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi^2 a^4 \sigma}(-\hat{r}) & r < a \\ \dfrac{(V - R_l z I) I}{2\pi r^2 \ln \dfrac{b}{a}} \hat{z} + \dfrac{I^2 \ln \dfrac{r}{b}}{2\pi^2 a^2 \sigma r \ln \dfrac{a}{b}} (-\hat{r}) & a < r < b \end{cases}$$

$$P_z(\text{传输能量}) = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = (V - R_l z I) I$$

§ 6.4 波印亭定理



O
z
$\vec{E}_r$
$\vec{H}$
$\vec{E}_z$
$\vec{S}_{-r}$
$\vec{S}$
$\vec{S}_z$
I
σ
a
V(ξ)
$\vec{H}$
$\vec{E}_z$
$\vec{E}_r$
$\vec{S}_z$
$\vec{S}_{-r}$
$\vec{S}$
b
R

（纵向）

§ 6.4 波印亭定理

$$P_{-r}(\text{单位长度的补充能量}) = \begin{cases} R_l I^2 \dfrac{\ln\dfrac{r}{b}}{\ln\dfrac{a}{b}} & a<r<b \\ I^2 r^2 \Big/ \pi a^4 \sigma & r<a \end{cases}$$

导体表面$r=a$时，P_{-r}结果一致

$$P_{-r} = I^2 \big/ \pi a^2 \sigma = I^2 R_l$$

讨论：$I^2 R_l$为单位长度内导体的热损耗功率，由恒定电流产生的电场可知，电场对运动电荷所作的功全部转化为热能，故$I^2 R_l$既代表电场对运动电荷所作的功，也代表热能，这意味着传输到导体中的能量全部被热损耗掉。

§6.4 波印亭定理

二、时谐场的波印亭定理

前面讨论的一般形式的波印亭定理对时谐场也成立，但对时谐场我们一般关心的是能量或功率的平均值，而不是瞬时值。

由复数形式可知：$\bar{\vec{S}} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*]$

所以定义：

$\dot{\vec{S}} = \dfrac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$为复波印亭矢量（其实部为能流密度矢量$\bar{\vec{S}}$在一个周期内的平均值）

§ 6.4 波印亭定理

同样定义：$\overline{w_e} = \frac{1}{2}\overline{\vec{E}\cdot\vec{D}} = \frac{1}{4}\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}\cdot\dot{\vec{D}}^*] = \frac{1}{4\varepsilon}\left|\dot{\vec{D}}\right|^2 = \frac{\varepsilon}{4}\left|\dot{\vec{E}}\right|^2$

为电场能量密度在一个周期内的平均值

（注意：其中$\left|\dot{\vec{E}}\right|^2 = \left|\dot{E}_x\right|^2 + \left|\dot{E}_y\right|^2 + \left|\dot{E}_z\right|^2$，

但不代表电场强度的振幅）

$\overline{w_m} = \frac{1}{2}\overline{\vec{B}\cdot\vec{H}} = \frac{1}{4}\mathrm{Re}[\dot{\vec{B}}\cdot\dot{\vec{H}}^*] = \frac{1}{4\mu}\left|\dot{\vec{B}}\right|^2 = \frac{\mu}{4}\left|\dot{\vec{H}}\right|^2$

为磁场能量密度在一个周期内的平均值

§ 6.4 波印亭定理

$$\overline{P} = \overline{\vec{J} \cdot \vec{E}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}^*]$$

为电场对运动电荷所作的功的平均功率密度

定义：
$$\dot{P} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}^*$$

为（电场做功的）复功率密度，其实部代表电场对运动电荷所作功的平均功率密度

（说明：若所有电流为传导电流$\dot{\vec{J}} = \sigma\dot{\vec{E}}$，则$\dot{P}$为实数，否则不一定）

可以推出：$-\nabla \cdot \dot{\vec{S}} = \dot{P} + 2jw(\overline{w_m} - \overline{w_e}) \rightarrow$ 复波印亭定理微分形式

$-\oint_S \dot{\vec{S}} \cdot d\vec{S} = \int_V \dot{P}dV + 2jw\int_V (\overline{w_m} - \overline{w_e})dV \rightarrow$ 复波印亭定理积分形式

§ 6.4 波印亭定理

若设$\dot{\vec{J}} = \sigma\dot{\vec{E}}$（电流为传导电流），则可把上式分成两部分

①实部 $-\mathrm{Re}\{\oint_S \dot{\vec{S}}\cdot d\vec{S}\} = \mathrm{Re}\{\int_V \dot{P} dV\} = \frac{1}{2}\int_V \sigma\left|\dot{\vec{E}}\right|^2 dV$

表明：电磁场传输到体积V内的能量全部用来对运动电荷做功，因为时谐场每个周期内行为相同，电场和磁场能量每个周期平均值相同，因此一周期的总能量的吞吐量为零，收支平衡。

②虚部 $-\mathrm{Im}\{\oint_S \dot{\vec{S}}\cdot d\vec{S}\} = 2w\int_V (\overline{w_m} - \overline{w_e}) dV$

表明：虚部反映了电磁场存储的能量

§ 6.4 波印亭定理

$\dot{S}$的面积分实部称为有功功率，反映了电磁场能量流入体积V内对运动电荷所做的功，最后都变成了热能。

$\dot{S}$的面积分虚部称为无功功率，其大小为V内磁场能量与电场能量之差的$2w$倍

此项可用于求解电磁场问题的等效电路参数

$$R = \frac{1}{I^2}\mathrm{Re}\left[-\oint_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \cdot d\vec{S}\right] = \frac{1}{I^2}\int_V \sigma \left|\dot{\vec{E}}\right|^2 dV$$

$$X = \frac{1}{I^2} I_m\left[-\oint_S (\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*) \cdot d\vec{S}\right] = \frac{1}{I^2} w\int_V (\overline{w_m} - \overline{w_e}) dV$$

§6.4 波印亭定理

总结：

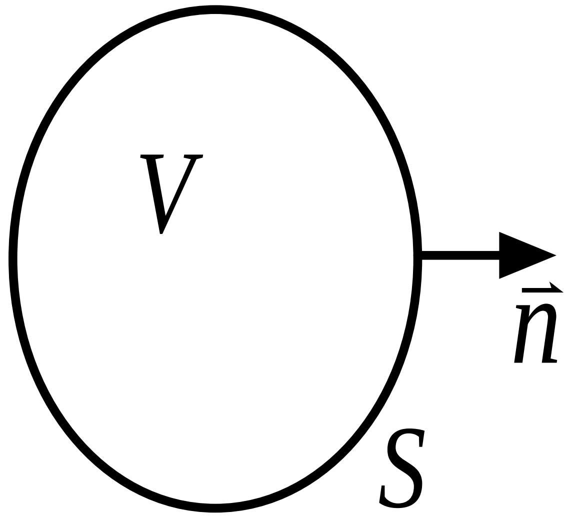
①每个周期的电磁场的平均存储能量不变

②每个周期平均效果来看，运动电荷从电场所获得的能量必须全部转换成热能（对每个瞬时则不一定）

③维持时谐场（频率为w），须有非时谐形式的能量补充（如直流或其它形式）

§ 6.5 唯一性定理

本节研究当求解某一区域V内的电磁场时的唯一性定理，即需要给定什么样的条件解才是唯一的。



介质：线性、各向同性

$$\vec{D}=\varepsilon(\vec{r})\vec{E} \qquad \vec{B}=\mu(\vec{r})\vec{H} \qquad \vec{J}_{传}=\sigma(\vec{r})\vec{E}$$

§ 6.5 唯一性定理

一、一般时变场的唯一性定理

若给定

①$\mu(\vec{r})$、$\varepsilon(\vec{r})$、$\sigma(\vec{r})$或$\vec{J}_{运}$

②V内电磁场在某一时刻t_0的初值（$\vec{E}\big|_{t_0}$ 和 $\vec{H}\big|_{t_0}$ ）

③任意$t > t_0$时刻（边界）S上的（电场强度的切向分量）（$\hat{n}\times\vec{E}$)、或者（磁场强度的切向分量）（$\hat{n}\times\vec{H}$)、或者S上部分（$\hat{n}\times\vec{E}$)部 分（$\hat{n}\times\vec{H}$)

则麦克斯韦方程组在区域V内任意$t > t_0$时刻解唯一

§6.5 唯一性定理

证明：反证法

设有两组不同的解：（$\vec{E}_1$，$\vec{H}_1$）和（$\vec{E}_2$，$\vec{H}_2$）

令$\vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$，$\vec{H}' = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$

则（$\vec{E}'$，$\vec{H}'$）满足齐次边界条件和齐次初时条件，即：

$$S\text{上}:\begin{cases} \hat{n}\times\vec{E}' = 0 \text{或} \hat{n}\times\vec{H}' = 0 \\ \vec{E}'\Big|_{t_0} = 0, \vec{H}'\Big|_{t_0} = 0 \end{cases}$$

§ 6.5 唯一性定理

由波印亭定理

$$-\oint_S \left(\vec{E}' \times \vec{H}'\right)\cdot \hat{n}dS = \int_V \sigma \left|\vec{E}'\right|^2 dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}'\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}'\right|^2\right)dV = 0$$

($\because \left(\vec{E}' \times \vec{H}'\right)\cdot\hat{n} = \left(\hat{n}\times\vec{E}'\right)\cdot\vec{H}' = -\left(\hat{n}\times\vec{H}'\right)\cdot\vec{E}'$，由边界条件可知其积分为零）

方程两边对时间t进行积分，即$\int_{t_0}^{t} dt$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_0}^{t}\left\{\int_V \sigma\left|\vec{E}'\right|^2 dV\right\}dt + \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}'\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}'\right|^2\right)dV\Big|_t$$

由于上式右边两项恒大于等于零$\Rightarrow \vec{E}' = 0, \vec{H}' = 0$

即解唯一，得证

§6.5 唯一性定理

二、时谐场（ω≠0）的唯一性定理

设电流为传导电流$\dot{\vec{J}} = \sigma(\vec{r})\dot{\vec{E}}$，$\sigma \neq 0$

（时谐场往往不给定初始条件）

若给定：

①μ，ε，σ; ②S上的（$\hat{n}\times\dot{\vec{E}}$)或（$\hat{n}\times\dot{\vec{H}}$)

则麦克斯韦方程组在区域V内解唯一

证明：同样设有两组不同的解（$\dot{\vec{E}}_1$，$\dot{\vec{H}}_1$）和（$\dot{\vec{E}}_2$，$\dot{\vec{H}}_2$）

令$\dot{\vec{E}}' = \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{E}}_2$，$\dot{\vec{H}}' = \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{H}}_2$

§ 6.5 唯一性定理

则（$\vec{E}'$，$\vec{H}'$）满足齐次边界条件，即：

S上：$\hat{n}\times\dot{\vec{E}}'=0$或$\hat{n}\times\dot{\vec{H}}'=0$

由复波印亭定理

$$-\oint_S \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{E}}'\times\dot{\vec{H}}'^*\right)\cdot\hat{n}dS=\int_V\frac{1}{2}\sigma\left|\dot{\vec{E}}'\right|^2 dV$$

$$+2jw\int_V\left(\frac{1}{4}\mu\left|\dot{\vec{H}}'\right|^2-\frac{1}{4}\varepsilon\left|\dot{\vec{E}}'\right|^2\right)dV=0$$

$\therefore$ 上式右边实部和虚部均为零，实部为零$\overset{\sigma\neq 0}{\Rightarrow}\dot{\vec{E}}'=0$,

虚部为零$\overset{w\neq 0}{\Rightarrow}\dot{\vec{H}}'=0$

即解唯一，得证

§ 6.6 准静态场和准静态近似

一、时谐场的 $\vec{A}$、 φ 表达式

$$\rho(\vec{r},t)=\rho_m(\vec{r}^{'})\cos(wt+\psi(\vec{r}^{'}))\leftrightarrow\dot{\rho}=\rho_m(\vec{r}^{'})e^{j\psi(\vec{r}^{'})}$$

$$\rho(\vec{r},t-\frac{R}{C})=\rho_m(\vec{r}^{'})\cos(wt-kR+\psi(\vec{r}^{'}))\leftrightarrow\dot{\rho}e^{-jkR}$$

$$其中k=\frac{w}{C}$$

$$\because\varphi=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\rho(\vec{r}^{'},t-\frac{R}{C})dV^{'}\Rightarrow\dot{\varphi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\dot{\rho}e^{-jkR}}{R}dV^{'}$$

$$同理\Rightarrow\dot{\vec{A}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\dot{\vec{J}}e^{-jkR}}{R}dV^{'}$$

§ 6.6 准静态场和准静态近似

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\dot{\rho}e^{-jkR}}{R}dV' \qquad \dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\dot{\vec{J}}e^{-jkR}}{R}dV'$$

与静电静磁场的位函数相比，存在以下一些不同之处：

①多了一个相位因子e^{-jkR}

②$\dot{\rho}$，$\dot{\vec{J}}$的初始值的相位与空间坐标有关

$$\left(\begin{array}{l}\text{其原因：（1）场源分布的初始值}\varphi\text{不一样} \\ \qquad\qquad\quad\text{（2）从场源到观察点的延时不一样}\end{array}\right)$$

§ 6.6 准静态场和准静态近似

二、准静态近似

如果我们研究的问题范围是$l << \lambda$，即电尺寸远小于1

则:

①$kR = \frac{w}{C} R = \frac{2\pi f}{f\lambda} R = \frac{2\pi}{\lambda} R << 2\pi$，则可忽略相位因子$e^{-jkR}$

②在介质均匀处忽略初始相位随空间坐标的变化

电磁波空间相位的变化由二个原因:

$$\begin{pmatrix} \text{（1）电磁波本身传播引起的} kR \\ \text{（2）由于物理特性即材料特性改变引起的} \end{pmatrix}$$

§ 6.6 准静态场和准静态近似

$$\dot{\varphi} \approx \frac{e^{-j\psi_\rho}}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_m}{R} dV'$$

同理 ⇒ $$\dot{A} \approx \frac{\mu_0 e^{-j\psi_J}}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_m}{R} dV'$$

这样，我们可以用静电静磁的方法处理

注意：准静态近似忽略了电磁场的波动效应、电磁作用传递所需的时间、以及引起的空间相位的变化。但并不忽略介质变化引起的相位变化

$f = 50Hz, \lambda = 6000km$ $\qquad$ $f = 10MHz, \lambda = 30m$

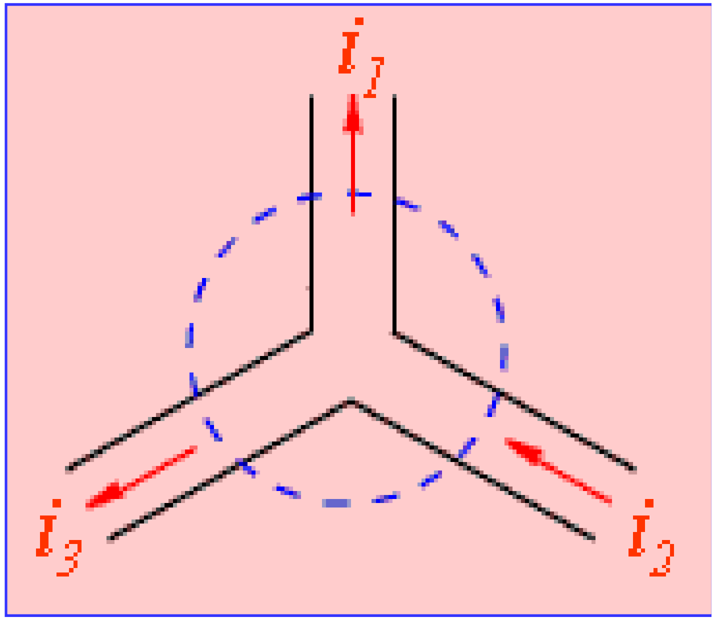
$f = 100MHz, \lambda = 3m$

§ 6.6 准静态场和准静态近似

①基尔霍夫电流定律仍然成立，但必须加上位移电流

$$\because \nabla\cdot\vec{J}_f+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec{J}_f+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{D}=0\Rightarrow\nabla\cdot\left(\vec{J}_f+\vec{J}_D\right)=0$$

$$\Rightarrow\nabla\cdot\vec{J}=0\ \text{其中}\vec{J}=\vec{J}_f+\vec{J}_D\Rightarrow\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=0$$



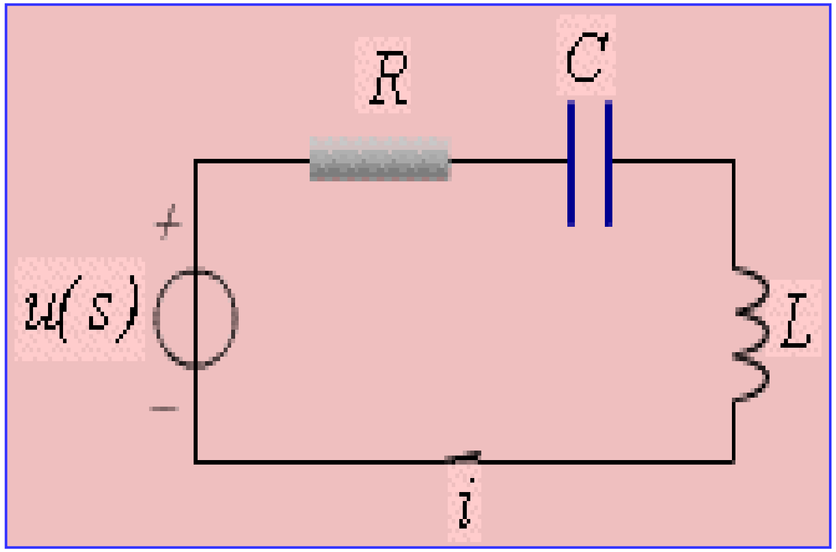
$$\text{导线内部}\dot{\vec{J}}=\sigma\dot{\vec{E}}+jw\varepsilon\dot{\vec{E}}$$

$$=\sigma\left(1+jw\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\dot{\vec{E}}$$

$$\overset{w\text{不太大时}}{\approx}\sigma\dot{\vec{E}}=\dot{\vec{J}}_f$$

$$\text{电容内部}\dot{\vec{J}}\approx jw\varepsilon\dot{\vec{E}}=\dot{\vec{J}}_D$$

§ 6.6 准静态场和准静态近似



②基尔霍夫电压定律

电感两端的电动势

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = u_L$$

$$u_s = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt = u_R + u_L + u_C$$

即基尔霍夫电压定律仍成立，只要考虑电感的感生电动势，将电感作为外电压处理即可。

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

一、广义麦克斯韦方程组与磁荷磁流的概念

研究的对象：介质是线性各向同性

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu(\vec{r})\vec{H}$$

由于麦克斯韦方程组的一次场源是不对称的，只有电荷电流； 如果在麦氏方程组中加入两个场源函数$\vec{J}_m$和ρ_m，则麦氏方程在数学上更加对称，即场源也是对称的。

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

广义麦克斯韦方程组

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E} = -\vec{J}_m - \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{B} = \rho_m \\
\nabla\cdot\vec{D} = \rho \\
\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\
\vec{B} = \mu\vec{H}
\end{cases}
$$

边界条件
$$
\begin{cases}
\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \\
\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\vec{J}_{ms} \\
\hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \rho_{ms} \\
\hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s
\end{cases}
$$

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

其中ρ_m：磁荷密度$\rightarrow$磁感应强度$\vec{B}$的通量源

$\vec{J}_m$：磁流密度$\rightarrow$电场强度的$\vec{E}$漩涡源$\rightarrow$运动的磁荷

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot \vec{J}_m - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = -\nabla \cdot \vec{J}_m - \frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

$\therefore \nabla \cdot \vec{J}_m + \dfrac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \rightarrow$ 磁荷守恒定律（或磁流连续性方程）

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

讨论：

（A）麦克斯韦方程组作为宏观电磁场方程组（加上本构关系）是一个完整的方程组，它包含了有关宏观电磁场的所有信息。原则上不需要任何其它的东西。根据麦氏方程，$\vec{B}$ 不论是在数学上还是物理上都是没有对应的通量源（即磁荷），同样$\vec{E}$ 也没有磁流这样的漩涡源，它只有变化的磁感应强度这个漩涡源。

这与静磁场中$\vec{H}$的磁荷概念不同，在那里虽然没有磁荷这种物理实在，但在数学上对永磁体问题 $\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}$ 有通量源，因此从数学等效的角度，可以认为有磁荷存在。

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

（B）磁荷这种物理存在到底有没有？Dirac预言了磁荷的存在，目前仍有科学家在寻找磁荷，但至今没有找到。可以说即使将来发现有也不等于今天我们的所作的研究是无用的，因为现有的宏观电磁场理论即麦氏方程组与实验吻合，这说明即使微观结构有磁荷存在，它的宏观平均效果不明显，否则麦氏方程组不可能与实验吻合。

总之，在目前的电磁场理论中我们认为是没有磁荷磁流的，麦氏方程组加上本构关系来描述宏观电磁场现象是充分地，包含了所有的信息，原则上不需要加别的东西。

为何引入磁荷磁流及广义麦克斯韦方程组？

磁荷磁流的概念及广义麦克斯韦方程组与等效原理（思想）密切相关

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

在时变电磁场中如果我们求解的是区域V内的电磁场，也就是说我们只对V 内的电磁场感兴趣，这时V 内的电磁场满足麦氏方程组，边界S 上满足一定的边界条件（例如给定电场或磁场强度的切向分量），同时在V内满足一定的初时条件。求解V 内的电磁场问题，我们往往根据需要象静电场中的镜像法一样，对原来的问题进行一下变化即将原来的问题等效为处理起来方便的一些问题，此时 S 上的边界条件代表了区域外包括边界上的贡献， 这样我们可以在区域外包括边界上选择一种简单的分布，只要在 V内满足麦氏方程，满足初始条件，边界上满足边界条件即可,在区域外包括边界上是什么样的分布是无关紧要的，可以有无数种分布达到同样的等效。

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

在考虑区域外包括边界上的分布时，思路可以开阔一些，我们不仅可以考虑物理上可以实现的分布，也可以考虑物理上不能实现的分布，这就包括磁荷磁流的分布，也就是满足广义麦氏方程组的分布，研究广义麦氏方程组的意义就在于此。

注意：当我们求解V内的电磁场时，V内的电磁场必须满足麦氏方程组，否则就不是物理问题了；V 外（包括边界上）由于不是我们要求的，因此可以满足麦氏方程组，也可以不满足麦氏方程组 ，而让它满足磁荷磁流的广义麦氏方程组，好处是：有时 V 外（包括边界上）用包含磁荷磁流这样一种在物理上不能实现的分布来等效,在数学上处理比较简单。

总之等效的目的是为了简化问题。

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

广义麦氏方程组可根据叠加原理分解为：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}_1 = -\dfrac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H}_1 = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D}_1 = \rho \\ \vec{D}_1 = \varepsilon \vec{E}_1 \\ \vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1 \end{cases}$$

麦氏方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}_2 = -\vec{J}_m - \dfrac{\partial \vec{B}_2}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H}_2 = +\dfrac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B}_2 = \rho_m \\ \nabla \cdot \vec{D}_2 = 0 \\ \vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 \\ \vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 \end{cases}$$

磁流麦氏方程组

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

将两个方程组相加，并令：

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2 \quad \vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2 \quad \vec{D}=\vec{D}_1+\vec{D}_2 \quad \vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$$

即为原来的广义麦氏方程组

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

二、磁流麦氏方程组

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{E}_m = -\vec{J}_m - \dfrac{\partial \vec{B}_m}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H}_m = +\dfrac{\partial \vec{D}_m}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B}_m = \rho_m \\
\nabla \cdot \vec{D}_m = 0
\end{cases}
$$

本构关系：$\vec{D}_m = \varepsilon_m \vec{E}_m \quad \vec{B}_m = \mu_m \vec{H}_m$

ε_m, μ_m为磁流麦氏方程组问题中的介电常数和磁导率

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

单独研究磁流麦氏方程组时，ε_m, μ_m可独立取值，不必和麦氏方程组中的ε, μ取一样。

广义麦氏方程组是在$\varepsilon_m = \varepsilon, \mu_m = \mu$时麦氏方程组和磁流麦氏方程组之和。

磁荷：$Q_m = \int_V \rho_m dV$ 为体积V内的磁荷

磁流：$I_m = \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S}$ 为通过曲面S的磁流

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

1、位函数表示，用$\vec{F}_m$和φ_m表示

$$\nabla\cdot\vec{D}_m=0\Rightarrow\vec{D}_m=-\nabla\times\vec{F}_m$$

$$\nabla\times\vec{H}_m=\frac{\partial\vec{D}_m}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times\vec{H}_m=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{F}_m\Rightarrow\nabla\times\left(\vec{H}_m+\frac{\partial\vec{F}_m}{\partial t}\right)=0$$

$$\Rightarrow\vec{H}_m+\frac{\partial\vec{F}_m}{\partial t}=-\nabla\varphi_m\Rightarrow\vec{H}_m=-\frac{\partial\vec{F}_m}{\partial t}-\nabla\varphi_m$$

设ε_m,μ_m均匀

$$\nabla\cdot\vec{B}_m=\rho_m\Rightarrow\nabla^2\varphi_m+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{F}_m=-\rho_m/\mu_m$$

$$\nabla\times\vec{E}_m=-\vec{J}_m-\frac{\partial\vec{B}_m}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\nabla^2\vec{F}_m-\mu_m\varepsilon_m\frac{\partial^2\vec{F}_m}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\vec{F}_m+\mu_m\varepsilon_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial t})=-\varepsilon_m\vec{J}_m$$

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

2、对偶原理（麦氏方程组与磁流麦氏方程组的对偶）

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec{E}_m = -\vec{J}_m - \dfrac{\partial\vec{B}_m}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H}_m = \dfrac{\partial\vec{D}_m}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}_m = \rho_m \\ \nabla\cdot\vec{D}_m = 0 \\ \vec{D}_m = \varepsilon_m\vec{E}_m \\ \vec{B}_m = \mu_m\vec{H}_m \end{cases}$$

二者形式上很相似，只要求出一个方程组的解，另一个方程组的解可对偶得出。

§ 6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

如果麦氏方程组中的场源和场量作如下变换

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}_m \quad \vec{H} \leftrightarrow -\vec{E}_m \quad \vec{D} \leftrightarrow \vec{B}_m \quad \vec{B} \leftrightarrow -\vec{D}_m$$

$$\vec{J} \leftrightarrow \vec{J}_m \quad \rho \leftrightarrow \rho_m \quad \varepsilon \leftrightarrow \mu_m \quad \mu \leftrightarrow \varepsilon_m$$

则$\vec{E}_m$、$\vec{H}_m$、$\vec{D}_m$、$\vec{B}_m$及ρ_m、$\vec{J}_m$满足磁流麦氏方程组及相关的本构关系，反之亦然。

相应的边界条件有

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \leftrightarrow \hat{n}\times(\vec{H}_{m2}-\vec{H}_{m1})=0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_s \leftrightarrow \hat{n}\cdot(\vec{B}_{m2}-\vec{B}_{m1})=\rho_{ms}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \leftrightarrow \hat{n}\cdot(\vec{D}_{m2}-\vec{D}_{m1})=0$$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_s \leftrightarrow \hat{n}\times(\vec{E}_{m2}-\vec{E}_{m1})=-\vec{J}_{ms}$$

S上：$\hat{n}\times\vec{E}=\vec{G} \leftrightarrow \hat{n}\times\vec{H}_m=\vec{G}$ 或$\hat{n}\times\vec{H}=\vec{P} \leftrightarrow \hat{n}\times\vec{E}_m=-\vec{P}$

§6.7 广义麦克斯韦方程组及对偶原理

相应的：$\left\{\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \end{aligned}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \vec{D}_m &= -\nabla\times\vec{F}_m \\ \vec{H}_m &= -\frac{\partial\vec{F}_m}{\partial t}-\nabla\varphi_m \end{aligned}\right.$

故有$\vec{A}\leftrightarrow\vec{F}_m$　　　　$\varphi\leftrightarrow\varphi_m$

如果虽然电荷电流分布和磁荷磁流分布具有对偶性，但边界条件不具有对偶性，则麦氏方程组与磁流麦氏方程组不具有对偶性，即不能简单的由一组方程组的解得到另外一组方程组的解，因为方程组的解不仅与方程和场源有关，根据唯一性定理，它还和边界条件以及初始条件有关。

对达朗贝尔方程（1）两边取散度

$$\nabla\cdot\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\nabla\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\nabla\cdot\vec{J}_f$$

$$\Rightarrow\quad \nabla^2\nabla\cdot\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\nabla\cdot\vec{J}_f$$

代入洛仑兹条件 $\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

得

$$-\mu\varepsilon\nabla^2(\frac{\partial\varphi}{\partial t})+\mu^2\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu\nabla\cdot\vec{J}_f$$

交换微分次序 $-\mu\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\varphi)+\mu^2\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial t}(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})=-\mu\nabla\cdot\vec{J}_f$

整理得 $$-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})=-\mu\nabla\cdot\vec{J}_f$$

将达朗贝尔方程（2)代入上式，得

$$\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\rho_f}{\varepsilon})=\mu\nabla\cdot\vec{J}_f$$

即 $$\boxed{\nabla\cdot\vec{J}_f=-\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$ 电流连续性方程

它表明洛仑兹条件（ $\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ ）隐含着重要的物理意义。

返回